

# PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO

GAMA, Fernando José de Almeida<sup>1</sup> & BRAGA, Renato P.<sup>2</sup> & CUNHA, Emanuel<sup>3</sup>

## 1. INTRODUÇÃO

Poucos são os estudos da Teoria Geral da Relatividade comprovados e bem estabelecidos experimentalmente, pois poucos são os testes viáveis experimentalmente acerca destas teorias sobre campos gravitacionais, e a principal razão disto é a nossa localização (do Planeta Terra), que propicia fracos efeitos devido às pequenas distâncias, que não significam diferenças consideráveis em relação aos resultados obtidos através da Teoria Newtoniana.

Os principais testes comprovados experimentalmente sobre a Teoria Geral da Relatividade, chamados de “testes clássicos”, propostos pelo próprio Einstein que são:

1. Deflexão de um feixe de luz por um campo gravitacional: isto foi comprovado pela observação de estrelas durante o eclipse de 1919 e posteriormente com outros eclipses e outros tipos de observações (ver, por exemplo, a lista 11).
2. Desvio gravitacional da frequência de um feixe de luz num campo gravitacional: isto foi comprovado pela experiência de Pound e Rebka na torre de Harvard em 1960. Como frequência é o inverso do tempo, a marcha de um relógio é afetada por um campo gravitacional e isto foi testado colocando-se relógios em um avião.
3. Precessão do periélio de Mercúrio: havia uma pequena discrepância entre a precessão calculada pela mecânica newtoniana e a precessão observada,  $43,11'' \pm 0,45''$  por século. Quando Einstein calculou o valor desta precessão, usando a relatividade geral, ele encontrou quase  $43''$ .

Vamos analisar um pouco mais afundo este terceiro item. De acordo com a mecânica newtoniana, as órbitas dos

planetas deveriam ser elipses fechadas, com o Sol situado em um dos focos e os eixos apontando sempre as mesmas direções do espaço. Na prática, porém, a elipse não fica no mesmo lugar o tempo todo. Em particular, o ponto de máxima aproximação ao Sol (periélio) muda de localização conforme mostrado na Fig. 1.

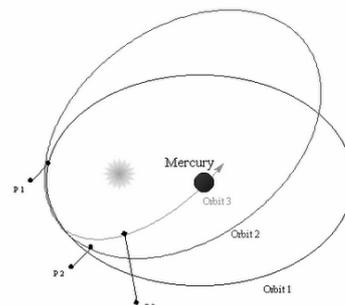


Fig. 1: O avanço do periélio da órbita do planeta Mercúrio (ponto de maior proximidade em relação ao Sol aqui representado pelos pontos P1, P2 e P3) só pode ser corretamente explicado com base na Teoria da Relatividade Geral.

## 2. MOVIMENTO CLÁSSICO DE KLEPER

Vamos inicialmente rever o problema clássico segundo Kepler descrevendo o movimento de uma partícula de teste no campo gravitacional de um corpo massivo para depois considerar a contrapartida da Relatividade Geral.

Inicialmente vamos considerar uma partícula de massa  $m$  movendo-se sob a influência de uma força proporcional ao inverso do quadrado da distância ao centro de atração localizado na origem  $O$ , isto é:

$$F = -\frac{\mu}{r^2} \quad (1)$$

Onde  $\mu$  é uma constante. Assim pela Segunda Lei de Newton, temos:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2)$$

O momento angular de  $m$  é dado por:

$$\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (3)$$

- 
1. Primeiro autor aluno de Mestrado do Departamento de Física Universidade Federal de Campina Grande. R- Aprijo Veloso 882 – Universitario – PB. CEP.: 58 429-140, Bloco CY, Sala 103. E-mail: fernando\_gama@uol.com.br
  2. Segundo autor aluno de Mestrado do Departamento de Física Universidade Federal de Campina Grande. R- Aprijo Veloso 882 – Universitario – PB. CEP.: 58 429-140, Bloco CY, Sala 103. E-mail: natopb@bol.com.br
  3. Terceiro autor aluno de Mestrado do Departamento de Física Universidade Federal de Campina Grande. R- Aprijo Veloso 882 – Universitario – PB. CEP.: 58 429-140, Bloco CY, Sala 103. E-mail: emanuel.cunha@yahoo.com.br

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \left(-m\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\right) = 0$$

Portanto, o produto interno de  $\dot{\mathbf{r}}$  por ele mesmo e de  $\mathbf{r}$  por  $\hat{\mathbf{r}}$  se anulam porque os vetores são paralelos, assim o momento angular é conservado e  $\mathbf{L} = m\mathbf{h}$ , onde  $\mathbf{h}$  é um vetor constante. Se assumimos  $\mathbf{h} \neq 0$ , teremos  $\mathbf{r}$  sempre perpendicular a  $\mathbf{h}$ , assim o movimento da partícula fica restrito a um plano. Se introduzirmos coordenadas polares no plano  $(r, \Phi)$ , a equação de movimento fica:

$$(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi})\hat{\phi} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad (4)$$

Tomando o produto escalar desta equação por  $\hat{\phi}$ , fazendo  $r^2\dot{\phi} = \text{const} = h$ , que na verdade indica a conservação de  $\vec{L}$ . Fazendo o produto escalar desta mesma equação por  $\hat{\mathbf{r}}$ , obtemos:

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{\mu}{h^2} \quad (5)$$

Como queremos achar a órbita  $\mathbf{r}$  em função de  $\Phi$ , introduzimos a variável  $u=1/r$  na equação acima e ela torna-se a Equação de Binet:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2}$$

Esta equação tem como solução:

$$u = \frac{\mu}{h^2} + C \cos(\phi - \phi_0) \quad (6)$$

Onde  $C$  e  $\phi_0$  são constantes. Definindo  $l = h^2/\mu$  e  $e = Ch^2/\mu$ . Substituindo na equação acima, ficamos com:

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos(\phi - \phi_0) \quad (7)$$

Esta é a equação polar de uma seção cônica onde  $l$  determina a escala,  $e$  a excentricidade e  $\phi_0$  a orientação em relação ao eixo  $x$ . Onde temos que para:

$0 < e < 1$ , um movimento elíptico ( $e=0$ , um círculo)

$e = 1$ , um movimento parabólico

$e > 1$ , um movimento hiperbólico

No caso que estamos estudando, temos um movimento elíptico e o ponto mais próximo da origem é chamado de **Periélio**, conforme mostrado na figura abaixo:

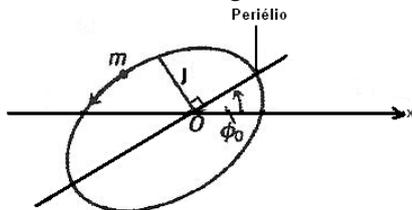


Fig.1: Movimento elíptico de Kepler

O movimento de uma partícula de teste no campo de um corpo massivo é chamado de *problema de um corpo*. Vamos

estabelecer o resultado clássico da Teoria de Newton para um *problema com duas partículas*, ou seja, dois pontos massivos movendo-se sob a influência mútua de seus campos gravitacionais pode ser reduzido a um problema de uma única partícula.

Consideremos duas massas  $m_1$  e  $m_2$  nas posições  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  respectivamente, conforme figura abaixo:

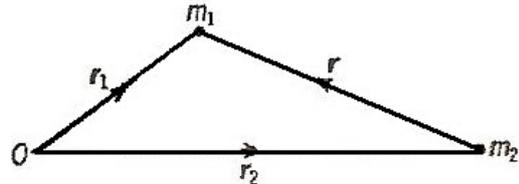


Fig. 2: Problema de dois corpos

Definindo o vetor posição de  $m_1$  em relação a  $m_2$  como:  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ .

Se  $F_{12}$  é a força de  $m_1$  sobre  $m_2$  e  $F_{21}$  a força de  $m_2$  sobre  $m_1$ , conforme a Terceira Lei de Newton, temos que:  $F_{12} = -F_{21}$ .

Usando a Segunda Lei de Newton e a Lei da Gravitação Universal, obteremos:

$$F_{12} = m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = -m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad (8),$$

e assim:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} - \frac{Gm_1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad (9)$$

Assim podemos concluir que a equação do movimento pode realmente ser escrita como:

$$F_{12} = m\ddot{\mathbf{r}} = -m\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Onde  $m$  é a massa reduzida dada por:  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  e  $\mu = G(m_1 + m_2)$ .

Em um modelo simples de movimento planetário, nós fazemos  $m_2$  como a massa do Sol e  $m_1$  a massa do planeta. Que é uma interpretação adequada do movimento de um planeta e é novamente uma elipse de Kepler.

### 3. AVANÇO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO

Vamos analisar o problema de um corpo conforme a Relatividade Geral. Assumindo que o corpo central produz um campo gravitacional esférico e simétrico sobre uma partícula de teste, a solução apropriada na relatividade geral para este caso é a solução de Schwarzschild, além disso, a partícula de teste se move através de uma de uma geodésica temporal, assim devemos estudar a solução da geodésica de Schwarzschild cuja métrica é dada pela equação:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = 2E = -1 \quad (1)$$

Do capítulo 7, no parágrafo 7.6 temos que:  $2E = g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = -1$ , e restringindo o movimento ao plano equatorial como foi estudado na teoria Newtoniana, onde  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , ficamos com:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 = 1 \quad (2)$$

Pegando um ponto de diferenciação em relação ao tempo próprio  $\tau$ , nós encontraremos a geodésica temporal. Acontece que é suficiente restringirmos nossa atenção para três equações, que são dadas quando  $a = 0, 2, 3$ , em:  $\frac{\partial K}{\partial x^a} -$

$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0$ , que são:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[ (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi} \right] = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \quad (5)$$

Mas nós precisamos de quatro equações diferenciais para encontrar as quatro incógnitas, que são:

$$t = t(\tau) \quad r = r(\tau) \quad \theta = \theta(\tau)$$

$$\phi = \phi(\tau)$$

Obtemos a quarta equação substituindo a equação (3) e (5) em (1):

$r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = 1$ , como  $\theta = \pi/2$ , integrando em relação a  $\phi$ , temos:

$$r^2 \dot{\phi} = L, \text{ ou seja, } r^2 \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = L \quad (6)$$

Integrando a equação (3), obtemos:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right) = E \quad (7)$$

onde  $E$  e  $L$  são constantes de movimento. Usando as equações (6) e (7) em (2), ficamos com:

$$\left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - E^2 + \left( \frac{L^2}{r^2} + 1 \right) \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) = 0 \quad (8)$$

Fazendo:  $\frac{dr}{d\lambda} \equiv \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\phi}$ , ficamos com:

$$\left( \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 - E^2 + \left( \frac{L^2}{r^2} + 1 \right) \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) = 0 \quad (9)$$

Multiplicando por  $1/L^2$  e chamando  $u = r^{-1}$ , (onde:  $du/d\lambda = -u^2 dr/d\lambda$ ), obtemos:

$$\left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 = \frac{E^2 - 1}{L^2} + \frac{2m}{L^2} u + 2mu^3 \quad (10)$$

Que é uma equação diferencial de primeira ordem para determinar a órbita da partícula de teste ou mais precisamente a trajetória do corpo de teste projetado no plano onde  $t = \text{Constante}$ . ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ )

Diferenciando a equação (10) em relação a  $u$  e admitindo  $\frac{du}{d\phi} \neq 0$ , pois  $\frac{du}{d\phi} = 0$  corresponde a órbitas circulares, temos:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{L^2} + 3mu^2 \quad (11)$$

Esta é a versão relativística da Equação de Binet, diferindo do resultado Newtoniano pela presença do último termo.

Fazendo  $a = \frac{GM}{L^2}$ ,  $b = \frac{3L^2}{c^2}$ , e lembrando que  $L = r^2 \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)$

a equação (11) pode ser escrita como:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = a(1 + bu^2) \quad (12)$$

Como primeira aproximação para as órbitas, vamos examinar o caso em que  $r$  é muito grande. Na equação (12), para  $r^2 \gg b$ ,  $bu^2 \rightarrow 0$ , tornando-se:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = a \quad (13)$$

Portanto, as órbitas serão Newtonianas se a velocidade própria na direção  $\phi$  for muito menor que a velocidade da luz, pois a correção da Relatividade Geral introduzida na equação (12) é muito pequena e para as velocidades usuais o desvio introduzido é desprezível nas órbitas Newtonianas.

Esta correção representa três vezes o quadrado da velocidade orbital do planeta,

$$\text{ou seja: } bu^2 = \frac{b}{r^2} = \frac{3L^2}{c^2 r^2} = 3 \left[ \frac{r}{c} \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right) \right]^2 \ll 1$$

Tomando como exemplo a Terra que tem velocidade orbital de 30km/s, o valor de  $bu^2$  é da ordem de  $10^{-8}$ .

Para calcular o avanço no periélio usando a equação (11), adotamos um procedimento iterativo, expandindo a solução em potências de  $m/L^2$ , então:

$u = u^{(0)} + u^{(1)} + \dots$ , onde  $u^{(0)}$  é a solução da equação newtoniana obtida fazendo-se  $3mu^2 = 0$  e  $u^{(1)}$  é uma pequena correção, ou seja:

$\frac{d^2 u^{(0)}}{d\phi^2} + u^{(0)} = \frac{m}{L^2}$ , cuja solução de é dada por:

$$u^{(0)} = \frac{m}{L^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_0)],$$

por conveniência fazemos  $\phi_0 = 0$

$$u^{(0)} = \frac{m}{L^2} (1 + e \cos \phi) \quad (14)$$

Conforme a equação (11) para  $u^{(1)}$ , temos:

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = 3m(u^{(0)})^2$$

$$= 3m \left( \frac{m}{L^2} (1 + e \cos \phi) \right)^2$$

$$= 3 \frac{m^3}{L^4} (1 + e \cos \phi)^2$$

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = \frac{3m^3}{L^4} + \frac{6m^3}{L^4} e \cos \phi +$$

$$\frac{3m^3}{L^4} e^2 \cos^2 \phi \quad (15)$$

Considerando-se órbitas de pequena excentricidade, como a de Mercúrio, os termos de segunda ordem e superiores podem ser desprezados em primeira

aproximação, portanto o primeiro e o terceiro termo da equação (15) podem ser desprezados e o único termo que produz efeito observável é o termo em  $\cos\phi$ , cuja contribuição aumenta a cada revolução, então ficamos com:

$$\frac{a^2 u^{(1)}}{a\phi^2} + u^{(1)} = \frac{6m^3}{L^4} e \cos \phi \quad (16)$$

Cuja solução é:  $u^{(1)} = \frac{3m^3}{L^4} e\phi \sin \phi$  (17)

Então:

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} = \frac{m}{L^2} [1 + e \cos \phi + \frac{3m^2}{L^2} e\phi \sin \phi], \text{ ou seja:}$$

$$u = \frac{m}{L^2} [1 + e \cos \phi + \frac{3m^2}{L^2} e\phi \sin \phi] \quad (18)$$

Na equação (18) podemos ver que o termo que difere da solução clássica é  $\Delta\phi = \frac{3m^2}{L^2} \phi$ , considerando  $\Delta\phi \ll 1$ , a equação (18) pode ser escrita como:

$$u = \frac{m}{L^2} [1 + e \cos \phi + \Delta\phi e \sin \phi] \quad (19)$$

Para  $\phi = 2\pi$ , ou seja, após uma volta completa, temos:  $\Delta\phi = 2\pi \times \frac{3m^2}{L^2}$ . Em unidades relativísticas, teremos, para:  $m = \frac{GM}{c^2}$ ,  $w = \frac{2\pi}{T} = \frac{GM}{ac^2}$ ,  $a = \frac{GM}{L^2}$ , obtemos:

$$\Delta\phi = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1-e^2)} \quad (20)$$

Onde: a - é o semi-eixo maior da elipse

T - é o período da órbita

c - é a velocidade da luz

e - é a excentricidade da elipse

Considerando:

$$a = 5,546 \cdot 10^{10} \text{m} \quad G = 6,6732 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$T = 0,24085 \text{anos} \quad c = 2,998 \cdot 10^8 \text{m/s}$$

$$e = 0,205615$$

Encontramos:  $\Delta\phi = 5,012 \cdot 10^{-7} \text{rad./órbita}$ , ou  $\Delta\phi = 1,034 \cdot 10^{-1} \text{segundos /órbita}$ , ou ainda:

$\Delta\phi = 42,93 \text{ segundos /século}$
-----------------------------------------------

O resultado observado é de  $43,11 \pm 0,45 \text{ seg./século}$

#### 4. CONCLUSÃO

De fato na Teoria Newtoniana temos um avanço no periélio. Isto porque o sistema planetário não é um sistema de dois corpos, mas um sistema de n-corpos, e todos os outros planetas, asteróides e meteoros produzem efeito de perturbação no movimento de um planeta em particular. O planeta Júpiter, por exemplo, produz uma perturbação considerável, pois tem uma massa muito grande, de aproximadamente 0,1% da massa do Sol. Como Mercúrio tem uma órbita com alta excentricidade e

pequeno período, a posição do periélio pode ser observada com precisão. Antes da relatividade geral, havia uma discrepância de 43 segundos por século entre o valor calculado pela teoria clássica e o valor observado. Embora seja uma diferença muito pequena, ela é muito significativa em uma escala astrofísica, pois representa aproximadamente cem vezes o erro probabilístico em uma observação. Essa discrepância era motivo de preocupação dos astrônomos até meados do último século.

O resultado obtido para o avanço do periélio de Mercúrio é provavelmente a mais importante confirmação da Relatividade Geral, contudo deve ser dito que os valores observados foram extraídos de observações complicadas cujas causas têm várias origens.

A precessão do Periélio de Mercúrio é de aproximadamente  $5.600,73 \pm 0,41$  segundos por século. Destes, 5025 segundos estão associados à precessão da Terra e os outros planetas adicionam aproximadamente 532 segundos à precessão de Mercúrio devido a interação gravitacional newtoniana. A Teoria Newtoniana prevê  $\Delta\phi_n \sim 5.557,62 \pm 0,21$  segundos. A diferença de  $43,11 \pm 0,45$  segundos é explicada pela Teoria Geral da Relatividade, como vimos acima.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

D'INVERNO, R. A. **Introducing Einstein's Relativity**. Faculty of Mathematical Studies, University of Southampton. Clarendon Press, Oxford, 1998.

HARTLE, J. B. **Gravity: an introduction to Einstein's general relativity**. Addison Wesley. San Francisco, 2003.

SARAIVA, A. **Correcção da precessão do periélio de Mercúrio**. The General Science Journal, 2009. Disponível em: <<http://www.wbabin.net/saraiva/saraiva11p.pdf>> Acesso em 08 de janeiro de 2010.

TAYLOR, E. F.; WHEELER, J. A. **Exploring Black Holes – Introduction to General Relativity**. Addison Wesley Longman. San Francisco.

Notas de aula da disciplina Relatividade Geral I do Curso Mestrado em Física da UFCG, ministrado pelo professor Fábio Leal de Melo Dahia.